CINEMATIQUE DU POINT

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

I. Vecteur vitesse. 1
II. Vecteur accélération. 2
III. Exemples de mouvements. 4
IV. Changement de référentiel. 8

****

L'objet de la cinématique est l'étude du mouvement, indépendamment des causes (les forces).
On se place évidemment en mécanique newtonienne.

Le mouvement est <u>relatif</u> au référentiel d'étude : on définit un référentiel (R) comme l'association d'un repère d'espace (muni d'une BOND) et d'un repère de temps (horloge).
Par abus de langage, on confond souvent référentiel et repère d'espace.

I. Vecteur vitesse.

I.1. Définition.

On définit le vecteur vitesse d'un point M par rapport à un référentiel d'étude :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R}$$

<u>Rem.</u> : s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overset{o}{\vec{r}}$

$$\begin{cases} \|\vec{V}\| & \text{s'exprime en } ms^{-1} \\ \vec{V} & \text{est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement} \end{cases}$$

I.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- <u>Cartésiennes</u> : $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{x} + dy\,\vec{y} + dz\,\vec{z}$

$$\Rightarrow \quad \underset{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}{\vec{V}} \left| \begin{array}{l} \overset{o}{x} = V_x \\ \overset{o}{y} = V_y \\ \overset{o}{z} = V_z \end{array} \right.$$

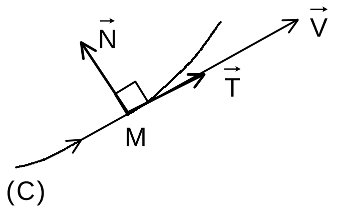
- <u>Cylindriques</u> : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$

$$\Rightarrow \quad \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}{\vec{V}} \left| \begin{array}{l} \dot{r} = V_r \\ r\dot{\theta} = V_\theta \\ \dot{z} = V_z \end{array} \right.$$

- <u>Sphériques</u> : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \underset{(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})}{\vec{V}} \left| \begin{array}{l} \dot{r} = V_r \\ r\dot{\theta} = V_\theta \\ r\sin\theta\,\dot{\varphi} = V_\varphi \end{array} \right.$$

- <u>Trièdre de Frenet</u> :



$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = \dot{s}\,\vec{T} = V\,\vec{T}} \qquad \text{(vitesse algébrique)}$$

II. Vecteur accélération.

II.1. Définition.

$$\vec{a}\,(M/R) = \left(\frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$$

(en l'absence d'ambiguïté : $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$)

$$\begin{cases} \|\vec{a}\| \text{ s'exprime en } ms^{-2} \\ \vec{a} \text{ est dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (cf ii))} \end{cases}$$

II.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- Cartésiennes

$$\vec{V} = \dot{x}(t)\,\vec{x} + \dot{y}(t)\,\vec{y} + \dot{z}(t)\,\vec{z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\ \left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array}\right. \quad (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

- Cylindriques

$$\vec{V} = \dot{r}(t)\,\vec{e_r}(t) + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{e_\theta}(t) + \dot{z}(t)\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = [\ddot{r}\,\vec{e_r} + \dot{r}\,\dot{\vec{e_r}}\,] + [\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\vec{e_\theta}}\,] + \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

Or : $\left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\ \dot{\vec{e_\theta}} = -\,\dot{\theta}\,\vec{e_r} \end{array}\right.$ donc :

$$\vec{a}\ \left|\begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a_r \\ 2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} = a_\theta \\ \ddot{z} = a_z \end{array}\right. \quad (\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$$

Rem. **:**

☞ Comme $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ sont des vecteurs « mobiles », il est bien sûr faux d'écrire :

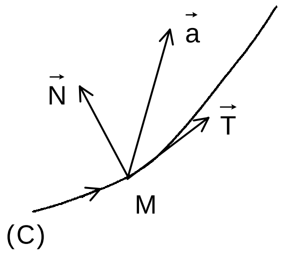
$$a_r = \dot{V}_r \quad \text{et} \quad a_\theta = \dot{V}_\theta\,.$$

Il faut <u>dériver aussi les vecteurs</u> !.. (donc <u>attention</u>)

☞ On peut remarquer que :

$$a_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\,\dot{\theta})$$ *(nous utiliserons plus tard ce résultat).*

- Trièdre de Frenet :



$$\vec{V} = \dot{s}_{(t)}\,\vec{T}(t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{s}\,\vec{T} + \dot{s}\,\dot{\vec{T}}$$

Or : $$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

Comme $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\,\vec{N}$:

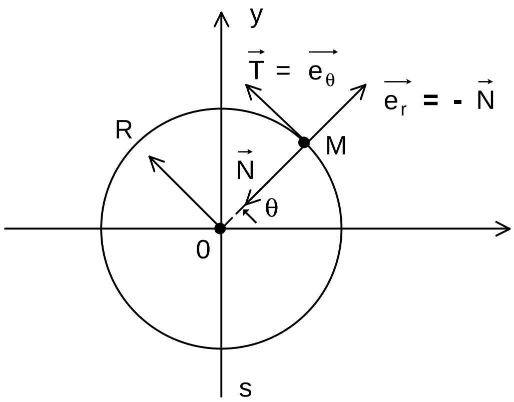
$$\dot{\vec{T}} = \frac{\dot{s}}{R}\,\vec{N}$$

Donc : $$\vec{a}_{(\vec{T},\vec{N},\vec{B})} \left| \begin{array}{l} \ddot{s} = \dot{V} = a_T \\ \dot{s}^2 / R = \dfrac{V^2}{R} = a_N \\ O \end{array} \right.$$

(a_T accélération tangentielle, $a_N > 0$ accélération normale)

III. Exemples de mouvements.

III.1. Mouvement circulaire.



On pose : $$\begin{cases} s = \overset{\frown}{AM} = R\theta \\ \omega(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

On remarque que : $$\begin{cases} \vec{N} = -\vec{e_r} \\ \vec{T} = \vec{e_\theta} \end{cases}$$

(attention, cette propriété n'est valable que pour le cercle).

Alors :
$$\begin{cases} \vec{V} = \dot{s}\,\vec{T} = R\dot{\theta}\,\vec{T} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\dot{\theta}^2\,\vec{N} + R\ddot{\theta}\,\vec{T} \end{cases}$$

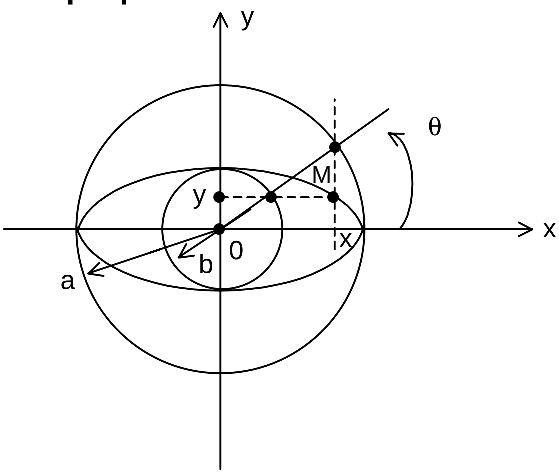
On retrouve donc, en utilisant soit la base $(\vec{T}, \vec{N})$, soit la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$, que :

$$\begin{cases} V = R\dot{\theta} = \dot{s} \\ a_N = R\dot{\theta}^2 = R\,\omega^2 = \dfrac{V^2}{R} \\ a_T = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = \ddot{s} \end{cases}$$

Pour un <u>mouvement circulaire uniforme</u> (MCU) :

$$\dot{\omega} = 0 : \omega = \omega_0 = \text{cste}$$

III.2. Mouvement elliptique.



L'équation cartésienne de l'ellipse de centre 0 est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ou encore :
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

Si $\theta(t)$, calculons $\vec{V}$ et $\vec{a}$ dans la base de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}\ \left|\ \begin{array}{l} \dot{x} = -a\,\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = b\,\dot{\theta}\cos\theta \end{array}\right.$$

Puis :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = a\,[-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta] \\ \ddot{y} = b\,[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta] \end{array} \right.$$

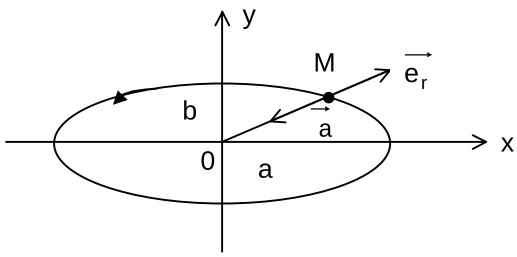
Cherchons à quelle condition : $\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{O}$ (mouvement à « accélération centrale », cf iii)).

$$\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = ab \left| \begin{array}{l} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

$$= ab\,\ddot{\theta}\,\vec{z} = \vec{O} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = 0$$

Soit : $\underline{\dot{\theta} = \omega = \text{cste} \quad \text{et} \quad \theta = \omega t}$ $\quad$ (si $\theta(o) = 0$)

Alors : $\underline{\vec{a} = -\omega^2\,\overrightarrow{OM}}$ *(accélération « centripète », proportionnelle à la distance)*



III.3. Mouvements à accélération centrale.

- <u>Déf.</u> : $\exists$ O fixe tel que $\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{O}$

<u>Rem.</u> **:** on exclut le cas trivial $\vec{V} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{O}$ et $\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{O}$ qui correspond aux mouvements rectilignes.

- <u>Propriétés</u>

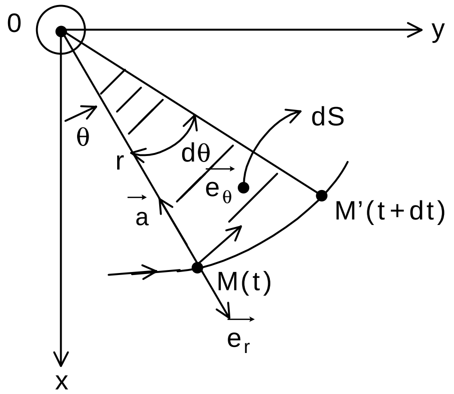
  ☞ Le mouvement est <u>plan</u>

Soit en effet $\vec{A} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{O}$$

Donc $\vec{A}$ = cste, or $\vec{A}$ est perpendiculaire au « plan instantané » de la trajectoire, donc ce plan ne varie pas au cours du temps.

- Le mouvement obéit à la <u>loi des aires</u>. On repère M par ses coordonnées polaires (r,θ) dans le plan de la trajectoire 0xy :



On a vu que : $a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$

Or ici : $a_\theta = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{r^2\dot{\theta} = C}$ (constante)

La constante C est appelée constante des aires (C en m^2s^{-1}).

Soit alors dS l'aire « balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ » pendant dt :

$$dS = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \qquad \text{(secteur circulaire)}$$

Ainsi : $\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C = \text{cste}}$ (« Vitesse aréolaire »)

La loi des aires dit que <u>l'aire balayée</u> (par le rayon vecteur) <u>par unité de temps est constante</u>. (Cette loi constituera, pour les Planètes du Système Solaire, la 2^{e} loi de Képler).

<u>Rem.</u> : en cartésiennes, on peut montrer que $C = x\dot{y} - y\dot{x}$

- <u>Formules de Binet</u> : ce sont deux formules qui donnent V et a_r, indépendamment du temps ; elles sont utiles si on connaît (ou si on cherche) l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire.

$$\begin{cases} V^2 = C^2\left[u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right] & (1) \\ a_r = -C^2u^2\left[u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right] & (2) \end{cases}$$

$$\left(u = \frac{1}{r}\right)$$

Démonstration

(1) $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

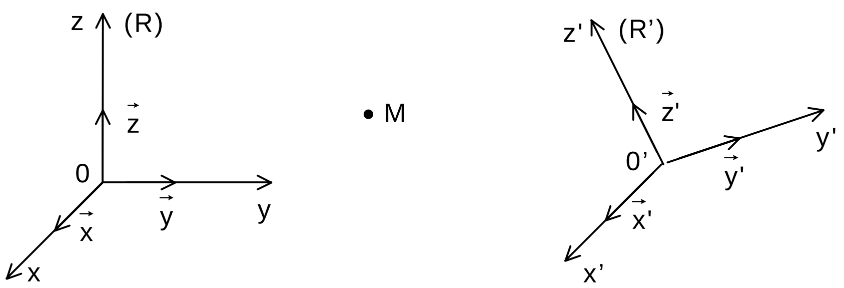
$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{C}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta} = -C\dfrac{du}{d\theta} \\ r^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{C^2}{r^2} = C^2u^2 \end{cases}$$

(2) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dfrac{d}{dt}(\dot{r}) = \dfrac{d}{dt}\left(-C\dfrac{du}{d\theta}\right) = -C\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\dfrac{d\theta}{dt} = -C^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} \\ r\dot{\theta}^2 = \dfrac{C^2}{r^3} = C^2u^3 \end{cases}$$

IV. Changement de référentiel.

IV.1. Vecteur $\overrightarrow{\Omega_e} = \vec{\Omega}$ (R'/R)



Soient deux référentiels

$\begin{cases} \text{(R) « fixe » ou « absolu »} \\ \text{(R') « mobile » ou « relatif »} \end{cases}$

Ils sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On peut caractériser le mouvement de (R') par rapport à (R), appelé mouvement « d'entrainement » par :

- Le mouvement de 0' ↔ $\vec{V}$ (0'/R)
- La rotation autour de O', caractérisée par le vecteur vitesse de rotation instantané de (R')/(R) noté $\vec{\Omega}$ (R'/R) ou $\overrightarrow{\Omega_e}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_e}$ étant défini par :

$$\boxed{\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{x'}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\Omega_e} \wedge \vec{x'} \\ \left(\dfrac{d\vec{y'}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\Omega_e} \wedge \vec{y'} \\ \left(\dfrac{d\vec{z'}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\Omega_e} \wedge \vec{z'} \end{cases}}$$

IV.2. Règle de « dérivation dans le repère mobile » :

Soit un vecteur quelconque $\vec{A}$ exprimé dans la base « mobile » $(\vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'})$:

$$\vec{A} = A_{x'} \vec{x'} + A_{y'} \vec{y'} + A_{z'} \vec{z'}$$

Si on dérive $\vec{A}$ dans (R), on doit dériver les composantes et les vecteurs :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \underbrace{(\overset{o}{A}_{x'} \vec{x'} + \overset{o}{A}_{y'} \vec{y'} + \overset{o}{A}_{z'} \vec{z'})}_{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'}}$$

$$+ \underbrace{(A_{x'} \overset{o}{\vec{x'}} + A_{y'} \overset{o}{\vec{y'}} + A_{z'} \overset{o}{\vec{z'}})}_{\overrightarrow{\Omega_e} \wedge \vec{A} \text{ par définition de } \overrightarrow{\Omega_e}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\,(R'/R) \wedge \vec{A}}$$

IV.3. Composition des vitesses.

Soit alors M en mouvement par rapport à (R) (mouvement « absolu ») et donc par rapport à (R') (mouvement « relatif »)

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R}_{\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\Omega_e} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

On pose :

$$\begin{cases} \vec{V'} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} & \text{vitesse relative} \\ \overrightarrow{V_e} = \vec{V}(O') + \overrightarrow{\Omega_e} \wedge \overrightarrow{O'M} & \text{vitesse d'entraînement} \end{cases}$$

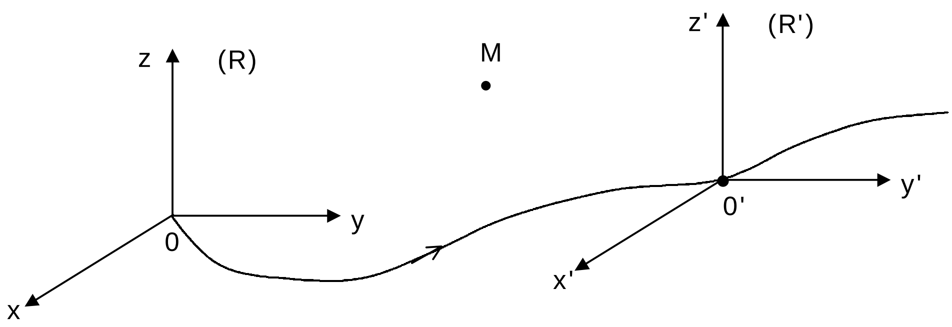
Alors :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V'} + \overrightarrow{V_e}}$$

Cas particuliers :

- (R') en translation par rapport à (R) :

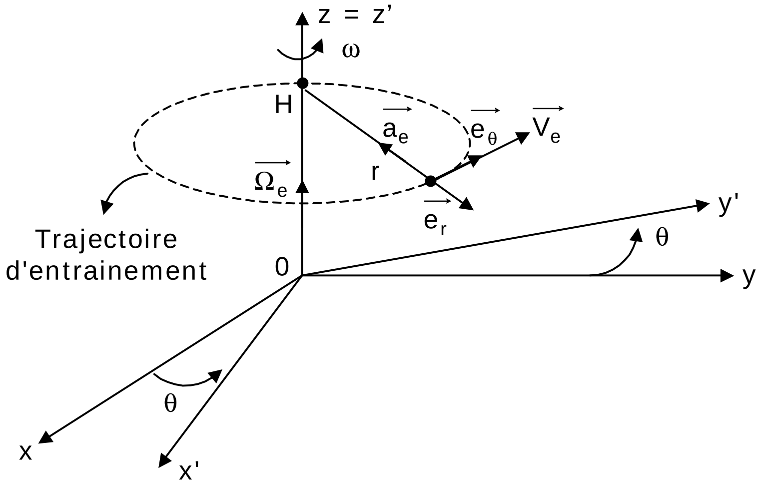
$$\overrightarrow{\Omega_e} = \vec{O}$$



Alors : $\overrightarrow{V_e} = \vec{V}(O')$, et :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V'} + \vec{V}(O')}$$

- (R') en rotation uniforme autour de 0z :



$\underline{\theta = \omega t}$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_e = \omega \vec{z} \\ O' = O \end{cases}$$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega}_e \wedge \vec{OM} = \omega \vec{z} \wedge \vec{OM} = \omega r \, \vec{e}_\theta$$

(Le mouvement d'entraînement est circulaire uniforme de rayon r)

IV.4. Composition des accélérations :

$$\vec{a}\,(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \vec{a}\,(O') + \left(\frac{d\vec{V'}}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\Omega}_e}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_e \wedge \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R$$

Avec :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{V'}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V'}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{V'} = \vec{a'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{V'} \\ \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M} = \vec{V'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M} \end{cases}$$

Posons alors :

$$\begin{cases} \boxed{\vec{a}_e = \vec{a}\,(O') + \frac{d\vec{\Omega}_e}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_e \wedge (\vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M})} & \text{(accélération d'entraînement)} \\ \boxed{\vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega}_e \wedge \vec{V'}} & \text{(accélération de Coriolis ou complémentaire)} \end{cases}$$

La loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

Cas particuliers :

- (R') en translation par rapport à (R)

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a}(O') \\ \overrightarrow{a_c} = \vec{O} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a}\,(O')}$$

- (R') en rotation uniforme autour de Oz :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\Omega_e}}{dt} = \vec{O} \\ \overrightarrow{\Omega_e} \wedge (\overrightarrow{\Omega_e} \wedge \overrightarrow{OM}) = \omega \vec{z} \wedge \underbrace{(\omega \vec{z} \wedge \overrightarrow{OM})}_{\omega r \overrightarrow{e_\theta}} = -\omega^2 r \overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 r \overrightarrow{e_r} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}}$

(accélération centripète $\equiv$ celle du mouvement d'entrainement, MCU)

Rem. **:** en mécanique classique, le temps est absolu : $t' = t$

(ce qui ne sera pas le cas en mécanique relativiste..)